Title	積分方程式論ヲ函數空間論ノ應用トシテミルトキ
Author(s)	佐藤, 常三
Citation	全国紙上数学談話会. 56 p.6-p.10
Issue Date	1935-09-06
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74118
rights	
Note	

196. 積分方程式論ヲ函數空間論ノ應用トシテミルトキ

佐藤常三（京大）

マヅ *Unit operator* E ニ對應スル核ノナイコトハ明ラカ．*Hilbert* ノ積分方程式ノ理論カラ出發シタ抽象空間ノ理論が，逆ニ前者ヲ後者ノ特種トミルトキ唯々其ノ儘デ濟マサレナイ氣ノスル個所がアルヤウニ思ヒマス、冒頭ニ述ベマシタ樣ニ $E(x, y)$ ナルヤウナ核が御座イマセンカラ *polynomial operator* ヲ定義スル際ハ：

$$P_m(z) = e_1 z + e_2 z^2 + \cdots\cdots + e_n z^m$$

ニ對シテ

$$P_m(K)^{\binom{x}{y}} = e_1 K + e_2 K^{(2)} + \cdots\cdots + e_m K^{(m)}$$

$(K^{(i)}(x, y)$ ハ K ノ *i-th iterated kernel*)

ヲ採用シマス、勿論 $K(x, y)$ ハ對稱核ニシテ *complete* トシマス。（特ニ正核トシテ置キマス），サウシマスト先ヅ次ノコトが云ヘマス。

$\underline{\text{polynomial } P_m(z) \text{ ガ } 0 \leqq z \leqq \frac{1}{\lambda_1} \text{ デ常ニ} \geqq 0 \text{ ナラバ}}$

$\underline{P_m(\mathbb{K})^{\binom{x}{y}} \text{ ハ positive definite kernel.}}$

茲ニ固有値ヲ $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \cdots\cdots \leqq \lambda_n \leqq \cdots\cdots$；固有函数ヲ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots\cdots, \varphi_n(x); \cdots\cdots$ トオキマス。

斯ウシテ polynomial kernel ヲ処法シテユクコトガ出来ル手順ハ、例ヘバ岩波講座，藤原博士著無限多変数函数論 II ニ述ベラレテアリマス、繰返シテ申シマスガ $E(x,y)$ ナル如キ核ノ存在ノ許サレヌノハ自明デスガ、常数項ヲ持ツ整式

$$P_m(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \cdots\cdots + e_m z^m$$

ニ對應シテ

$$P_m^*(\mathbb{K})^{\binom{x}{y}} = e_0 + e_1\mathbb{K} + e_2\mathbb{K}^{(2)} + \cdots\cdots + e_m\mathbb{K}^{(m)}$$

ガ定義出来ナイカ？　私ハコレニツイテノ理由ヲ求メタノデスガ、若シ私ノ操作ニ自家撞着ガアリマスナラバ，御叱正ヲ賜リタシ。

兎ニ角　$zP_m(z) = z(e_0 + e_1 z + \cdots\cdots + e_m z^m)$ ニ對應スル kernel ハ存在シマスカラ，$\mathbb{K}P_m^*(\mathbb{K})$ ニツイテハ

$$(1) \quad \varphi_i(x) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_i} P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)} \int_a^b \mathbb{K}P_m^*(\mathbb{K})^{\binom{x}{t}} \cdot \varphi_i(t)\,dt,$$

$$(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

コレカラ $P_m^*(\mathrm{K})^{\binom{x}{t}}$ ナル函数ノ characteristic properties ヲ求メル。

ソノタメニ

$$\psi_i(u) = \int_a^b P_m^*(\mathrm{K})^{\binom{u}{t}} \varphi_i(t)\,dt$$

トオケバ，(1) ヨリ

$$\mu_i \varphi_i(x) = \int_a^b \mathrm{K}(x, u)\,\psi_i(u)\,du,$$

$$\mu_i \equiv \frac{1}{\lambda_i} P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$$

シカルニ

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_{\nu i}}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x),$$

$$d_{\nu i} = \int_a^b \psi_i(t)\varphi_\nu(t)\,dt, \quad (\nu = 1, 2, 3, \text{-------})$$

$\{\varphi_\nu\}$ ナル system ハ "normé" デアルカラ

$$d_{\nu i} = \begin{cases} \lambda_i \mu_i & \\ & \text{for} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} \nu = i \\ \\ \nu \neq i \end{matrix}$$

即チ $\quad d_{ii} = P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right), \quad d_{\nu i} = \int_a^b \psi_i(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = 0$

由テ今 ψ_i ノ代リニ

$$\overline{\psi_i} = \left(\psi_i \middle/ P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\right)$$

ヲトルナラバ、i ノ一ツニツイテ

$$(\overline{\Psi_i}, \varphi_i)=1, \quad (\overline{\Psi_i}, \varphi_\nu)=0 \qquad \text{for all } \nu.$$

complete system ナルコトカラ

$$\overline{\Psi_i} \equiv \varphi_i$$

従ツテ

$$\psi_i = P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\varphi_i$$

元ニ戻セバ

$$\text{(2)} \qquad P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\varphi_i(x) = \int_a^b \overset{*}{P}_m(K)^{\left(\begin{smallmatrix}x\\t\end{smallmatrix}\right)} \varphi_i(t)\,dt,$$

$$(i=1,2,3,\text{-------})$$

今次ノ如キ symmetrical function ヲ考ヘル,

$$\chi(x,t) \equiv \overset{*}{P}_m(K)^{\left(\begin{smallmatrix}x\\t\end{smallmatrix}\right)} - \sum_{p=1}^{m} e_p K^{(p)}(x,t).$$

(2) ヲ用ヒテ

$$\begin{aligned}
\int_a^b \chi(x,t)\varphi_i(t)\,dt &= \int_a^b \overset{*}{P}_m(K)^{\left(\begin{smallmatrix}x\\t\end{smallmatrix}\right)} \varphi_i(t)\,dt \\
&\quad - \sum_{p=1}^{m} e_p \int_a^b K^{(p)}(x,t)\varphi_i(t)\,dt \\
&= \left\{ P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) - \sum_{1}^{m} e_p \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^p \right\} \varphi_i(x) \\
&= e_0 \varphi_i(x)
\end{aligned}$$

即チ $\qquad \varphi_i(x) = \dfrac{1}{e_0}\displaystyle\int_a^b \chi(x,t)\varphi_i(t)\,dt$

for all $i=1,2,3,\text{------}, ad\ \infty.$

コレガ成立スルタメニハ characteristic constant

$\frac{1}{e_0}$ ハ finite value ハトリ得ナイ。

故ニ　　$C_0 = 0$